**1 –** Ache uma fórmula fechada para a relação de recorrência seguinte usando métodos iterativos:

Como o termo geral é dado pela soma dos termos dos n termos de uma PG de termo inicial 1 e razão 2, temos que:

**2 –** Resolva a relação de recorrência heterogênea:

Solução da relação homogênea associada:

Como a raiz da equação associada é 3 com duplicidade 2, a solução da homogênea associada é da forma:

Seja , como 3 é raiz da equação acima, então a solução particular é dada por:

Logo, pela relação de recorrência, temos:

Agrupando os semelhantes:

Dividindo ambos lados por

Donde podemos concluir que:

Então a solução particular p(n) é:

Juntando ambas soluções, temos:

Para determinar o valor de e , utilizamos as condições iniciais:

Portanto:

**3 – a)** Encontre uma relação de recorrência para o no de cadeias de **n** bits que **não** contenham dois 0’s consecutivos.

Tomando-se uma cadeia com n-1 bits que não possui uma sequência de 2 zeros consecutivos, podemos construir 2 novas cadeias com n bits, também sem dois zeros consecutivos.

Para que não ocorram 00’s, devemos ter sempre a direita de um 0 o número 1, e a direita o 1 podemos ter 0 ou 1. Portanto, para construir a nova cadeia de n bits temos as duas possibilidades:

Se a nova cadeia começar por 0, o segundo dígito deverá ser 1 e em seguida podemos concatenar qualquer cadeia com n-2 dígitos, dentre as que não contém dois 0’s consecutivos. Portanto, para essa possibilidade temos cadeias.

Se a nova cadeia começar por 1, o segundo dígito poderá ser 0 ou 1, então podemos concatenar qualquer uma das cadeias com n-1 dígitos, então temos cadeias.

Juntando ambas, concluímos que:

1. Quais são as condições iniciais?

Para há apenas uma cadeia (vazia), e esta não possui dois zeros consecutivos. Para há duas cadeias, e ambas não possuem zeros consecutivos, pois têm apenas um bit. A partir de a recorrência começa a valer.

1. Resolva a relação de recorrência (solução analítica).

A relação é dada por: com .

A equação associada à relação é:

Que tem como soluções: e .

Então,

Pelas condições iniciais, temos que:

Simplificando a segunda equação:

Como , temos:

Então, o sistema fica:

Multiplicando a primeira equação por , temos:

Adicionando as duas equações:

Donde segue que:

E então, a solução geral é dada por:

1. Usando a solução analítica da equação de recorrência determine quantas cadeias de 9 bits existem que não contêm dois 0’s consecutivos.

**Há 89 cadeias de 9 bits sem dois 0’s consecutivos.**

**4 –** Suponha que 14 coelhos geneticamente modificados são colocados em uma ilha. O número destescoelhos triplica a cada ano por reprodução natural e, a partir do 2o ano, no início de cada ano, *n*2*n* coelhos são retirados da ilha, onde *n* é o número que representa a ordem do ano.

1. Construa a relação de recorrência para o número de coelhos na ilha no *n*ésimo ano.

O número de coelhos no n-ésimo ano é o triplo do ano anterior menos a quantidade de , ou seja:

1. Usando esta relação de recorrência descubra em que ano acabar-se-ão os coelhos na ilha.
2. Resolva a relação de recorrência e encontre a fórmula fechada de para o número de coelhos na ilha em função de *n*.

Solução da homogênea associada:

A solução h(n) é dada por:

Como 2 não é raiz, temos que a solução particular é dada por:

Utilizando a recorrência, temos:

Dividindo ambos lados por , temos:

Pela igualdade dos polinômios, podemos concluir que:

E também:

Logo, a solução particular é dada por:

Juntando ambas soluções, temos:

Pela condição inicial, temos que

Logo,

1. Usando a fórmula fechada encontrada no item c) calcule novamente o ano em que acabar-se-ão os coelhos na ilha e verifique a corretude de sua resposta comparando-a ao valor encontrado no item b). Estes valores devem ser iguais.

Observando que são ambas funções positivas , temos que o valor de nunca será nulo.

**5 –** Em uma determinada região com 25 milhões de habitantes os números de telefone oferecidos são daforma *NXX-NXX-XXXX*, onde N ∈ [2, 9] e X é um dígito qualquer. Qual é o menor número de códigos de área necessários para que todos os habitantes desta região possam ter números de telefones diferentes?

Justifique sua resposta usando o Princípio da Casa dos Pombos.

Como o dígito N varia entre 2 e 9 temos 8 possibilidades para ele, e para o dígito X temos 10 possibilidades (entre 0 e 9). Para formar um número de telefone temos, então:

Para que cada um dos 25 milhões de habitantes tenha um número diferente, devemos ter, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos 25 milhões de telefones, já que se houver um número menor de telefones do que de habitantes, teremos pelo menos 2 habitantes com o mesmo número.

Então, queremos encontrar o número W de combinações para o código de área tal que:

Logo, precisaremos de **pelo menos 4 códigos** de área para que cada habitante possa ter um número diferente dos demais.